MINISTERE DE L'ENVIRONNEMENT
ET DU CADRE DE VIE

E.I. T.P.E. 1981

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
- OPTION M -

(temps accordé : 4 heures)

10

- n est un entier $\geqslant 1$ fixé. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la variable dans $\mathbb{R}^n$.
- Dans tout le problème $A = \left[a_{ij}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice carrée n χ n, symétrique, à éléments réels.
- On appelle application de classe C^k toute application ayant des dérivées partielles toutes continues jusqu'à l'ordre k en tout point.

On appelle $C^k(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k.

On considère l'application $D : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ qui à f associe l'application

$$Df = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

C'est une application linéaire dont on notera $\mathcal{N}$ le noyau. Le but du problème est de chercher les $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 qui conservent $\mathcal{N}$, c'est-à-dire qui vérifient la propriété : si $f \in \mathcal{N}$ alors $f \circ u \in \mathcal{N}$,

ce qui se traduit par : si $Df = 0$ alors $D(f \circ u) = 0$.

Notations :

- Si u est une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on notera $u = (u_1, \ldots, u_n)$ où $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ représentent les applications coordonnées de u.
- Si de plus u est de classe C^1, on note $J_x(u) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sa matrice jacobienne au point $x \in \mathbb{R}^n$. On note dét $J_x(u)$ le déterminant de $J_x(u)$.
- Enfin si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, on note $H_x(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ appelée matrice hessienne de f au point $x \in \mathbb{R}^n$.

La partie II est la suite logique de la partie I. Mais elle peut être traitée indépendamment de celle-ci.

.../...

I

Dans cette partie, u désigne une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est de classe C^2 et telle que u conserve $\mathcal{N}$ (c'est-à-dire si Df = 0 alors D(f∘u) = 0).

1°) Montrer que les applications composantes de u appartiennent à $\mathcal{N}$.
Pour montrer que $Du_k = 0$, on pourra considérer
$f_k : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$.

2°) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

a) Exprimer $\frac{\partial (f \circ u)}{\partial x_i}$ en fonction des $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ et de u.

b) En appliquant deux fois cette relation, montrer que

$$\frac{\partial^2 (f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_\ell}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell} \right) \circ u + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \circ u$$

c) Interpréter l'ensemble de ces égalités pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$ comme une identité matricielle, qui exprime $H_x(f \circ u)$ en fonction de ${}^t J_x(u)$, $H_{u(x)}(f)$, $J_x(u)$ et des $\frac{\partial f}{\partial x_k} \left[u(x)\right]$ et $H_x(u_k)$.

Nota : Si $M = \left[m_{ij}\right]_{i,j}$ est une matrice n χ n, ${}^t M$ désigne sa transposée telle que ${}^t M = \left[m_{ji}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

3°) Si $M = \left[m_{ij}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice n χ n, on note $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ sa trace.

On notera aussi $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices n χ n symétriques à éléments réels.

a) Montrer que $(V,W) \to \mathrm{Tr}(VW)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $S_n(\mathbb{R})$.

b) Soient V_1 et V_2 deux éléments de $S_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$:

$$\text{si } \mathrm{Tr}\left[V_1 S\right] = 0 \text{ alors } \mathrm{Tr}\left[V_2 S\right] = 0$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $V_2 = \lambda V_1$

4°) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$

a) Montrer que $Df(x) = \mathrm{Tr}\left[A H_x(f)\right]$

b) Montrer que $D(f \circ u)(x) = \mathrm{Tr}\left[A\, {}^t J_x(u)\, H_{u(x)}(f) J_x(u)\right]$

5°) a) Soit $S = \left[S_{ij}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de $S_n(\mathbb{R})$.

Soit $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} S_{ij}\, x_i\, x_j$

Calculer $H_x(q)$ pour un $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$

En considérant $V_1 = A$ et $V_2 = J_x(u)\ A\ {}^tJ_x(u)$ montrer qu'il existe $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que $J_x(u)\ A\ {}^tJ_x(u) = \lambda(x).A$

c) En déduire $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$D(f\circ u)(x) = \lambda(x).\ Df\ [u(x)]$.

II

Dans cette partie on suppose que la matrice A est inversible, et on notera $B = A^{-1}$ son inverse.

On notera $B = [b_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ pour désigner ses éléments.

Dans cette partie u désigne une application : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que :

(1) $\forall k,\ 1\leqslant k\leqslant n,\quad Du_k = 0.$

(2) Il existe $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad J_x(u)\ A\ {}^tJ_x(u) = \lambda(x).A$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, dét $(J_x(u)) \neq 0$

1°) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(x) \neq 0$

b) Montrer que $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\quad {}^tJ_x(u)\ B\ J_x(u) = \lambda(x).B$

2°) Montrer que pour tous i,j,k tels que $1\leqslant i,j,k\leqslant n$

$$\sum_{p=1}^{n}\ \sum_{q=1}^{n} b_{pq}\ \frac{\partial u_p}{\partial x_k}\ \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\ b_{ki} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\ b_{kj} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}\ b_{ij}\right)$$

Indication : Dériver par rapport à x_k la quantité

$$\sum_{p=1}^{n}\ \sum_{q=1}^{n} b_{pq}\ \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\ \frac{\partial u_q}{\partial x_j} \quad \text{et écrire} \quad \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k \partial x_i}\ .\ \frac{\partial u_q}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\ \frac{\partial u_q}{\partial x_j}\right] - \frac{\partial u_p}{\partial x_k}\ \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}$$

3°) Montrer que $\forall k,\ 1\leqslant k\leqslant n \qquad (n-2)\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0$

On calculera à cet effet : $\sum_{i,j}\ \sum_{p,q}\ a_{ij}\ b_{pq}\ \frac{\partial u_p}{\partial x_k}\ \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}$

4°) On suppose $n \neq 2$.

a) Montrer que λ est constant et déduire de 2°) que $\forall i,j,q\ \ \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = 0$

b) Prouver que u est une application affine. Que peut-on dire de sa partie linéaire ?

c) Etudier le signe de λ en fonction de la signature de la forme quadratique dont la matrice est B dans la base canonique.

5°) On suppose n=2 ; et on prend pour A la matrice $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à $x = (x_1, x_2)$ associe $u(x) = (e^{x_1}\cos x_2, e^{x_1}\sin x_2)$.

Montrer que u satisfait aux conditions (1), (2), (3) mais que u n'est pas affine.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail